

## Erweiterung der Approximationssätze von Jackson im Sinne von Ch. Müntz II\*†

MANFRED VON GOLITSCHKE‡

*Institut für Angewandte Mathematik, Universität Würzburg, Germany*

*Communicated by G. G. Lorentz*

Received July 31, 1969

### I. APPROXIMATION IM INTERVALL $[0, 1]$

1. Es sei  $C[a, b]$  der lineare Raum der auf dem endlichen reellen Intervall  $a \leq x \leq b$  stetigen reellwertigen Funktionen  $f$ . Als Tschebyscheff-Norm bezeichnen wir den Ausdruck

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Die beste Approximation  $E_n(f)$  von  $f \in C[a, b]$  durch algebraische Polynome vom Grade  $n$  ist definiert durch

$$E_n(f) = \inf_{c_i} \left( \max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{i=0}^n c_i x^i \right| \right). \quad (1)$$

Nach einem fundamentalen Ergebnis von K. Weierstrass ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0$  für jedes  $f \in C[a, b]$ . Bei zusätzlichen Informationen über  $f$  können wir sogar abschätzen, wie schnell  $E_n(f)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null strebt:

**SATZ 1 (D. Jackson).** *Es sei  $f$  in  $[a, b]$   $k$ -mal stetig differenzierbar,  $k \geq 0$ . Dann gilt für alle  $n > k$*

$$E_n(f) \leq A_k n^{-k} w(f^{(k)}; 1/n), \quad (2)$$

wobei  $w(f^{(k)}; t)$  der Stetigkeitsmodul der  $k$ -ten Ableitung  $f^{(k)}$  ist, und  $A_k$  nicht von  $f$  und  $n$  abhängt.

\* Dieser Artikel ist eine Weiterführung einer Arbeit [8] des Autors, die 1969 unter demselben Titel erschien.

† Die vorliegende Arbeit wurde zum Teil aus Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützt (Bu 166/11 und Ru 83/3).

‡ Der Autor ist Herrn Prof. Dr. P. O. Runck für viele wertvolle Anregungen und Vorschläge sehr dankbar.

Im Bestreben, das für die moderne Analysis so wichtige Ergebnis von Weierstrass zu verallgemeinern, gelang es Ch. Müntz das Folgende zu beweisen:

**SATZ 2 (Ch. Müntz).** *Es seien  $p_0, p_1, \dots$  eine Folge reeller Zahlen mit  $0 \leq p_0 < p_1 < \dots$  und  $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = \infty$ . Das System  $\sum_{i=0}^s a_i x^{p_i}$  ist genau dann dicht in  $C[0, 1]$  bezüglich der Tschebyscheff-Norm, falls  $p_0 = 0$  und  $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i = \infty$  ist.*

Die Ergebnisse von Jackson und Müntz legen die Frage nahe, ob dem Satz 1 entsprechende Abschätzungen für die beste Approximation

$$E_s(f; p_i) = \inf_{c_0, \dots, c_s} \left( \max_{0 \leq x \leq 1} \left| f(x) - \sum_{i=0}^s c_i x^{p_i} \right| \right) \tag{3}$$

gelten, wenn die Exponenten  $p_i$  eine fest vorgegebene reelle Zahlenfolge durchlaufen. Das Thema dieser Arbeit ist es also, einen Zusammenhang zwischen  $E_s(f; p_i)$ , der Exponentenfolge  $\{p_i\}$  und der zu approximierenden Funktion  $f$  herzustellen. Erfüllen die Exponenten  $p_i$  die Voraussetzungen des Satzes 2 von Müntz, so ist für alle  $f \in C[0, 1]$  stets  $\lim_{s \rightarrow \infty} E_s(f; p_i) = 0$ .

Falls  $p_0 = 0$  ist, so genügen die Funktionen  $\{1, x^{p_1}, \dots, x^{p_s}\}$  in  $[0, 1]$  der Haarschen Bedingung. Daher ist für jede Funktion  $f \in C[0, 1]$  das "Polynom" bester Approximation der Gestalt  $\sum_{i=0}^s a_i x^{p_i}$  eindeutig bestimmt.

Legen wir nicht die Tschebyscheff-Norm, sondern die  $L_2$ -Norm zugrunde, so ist bereits folgendes Ergebnis bekannt: (Vergleiche [1] Achieser, Kap. 1, 14; [2] Cheney, Kap. 6,2)

**LEMMA 1.** *Seien  $q, p_1, \dots, p_s$  verschiedene reelle Zahlen größer als  $-1/2$ . Es sei*

$$d_s(x^q; p_i) = \inf_{c_1, \dots, c_s} \left\{ \int_0^1 \left( t^q - \sum_{i=1}^s c_i t^{p_i} \right)^2 dt \right\}^{1/2} \tag{4}$$

die beste Approximation im Mittel auf  $[0, 1]$  für  $f(x) = x^q$ . Dann ist

$$d_s(x^q; p_i) = \frac{1}{\sqrt{2q+1}} \prod_{i=1}^s \frac{|q - p_i|}{q + 1 + p_i}. \tag{5}$$

Mit Hilfe dieses Lemmas ist es leicht, eine gute Abschätzung für die gemäß (3) gebildete beste Approximation  $E_s(x^q; p_i)$  der Funktion  $f(x) = x^q$  zu finden:

**LEMMA 2.** *Es seien  $q > 0$ ,  $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_s$  verschiedene reelle Zahlen. Dann ist*

$$E_s(x^q; p_i) \leq \prod_{i=1}^s \frac{|q - p_i|}{q + p_i}. \tag{6}$$

*Beweis.* Sei  $M > 0$  eine feste reelle Zahl. Wir setzen  $\bar{q} = Mq$  und  $r_i = Mp_i$ ,  $i = 0, \dots, s$ . Für beliebige reelle Koeffizienten  $b_i$  und alle  $x \in [0, 1]$  ist

$$J(x) = \left| x^{\bar{q}+1/2} - \sum_{i=1}^s b_i x^{r_i+1/2} \right| = (\bar{q} + 1/2) \left| \int_0^x \left( t^{\bar{q}-1/2} - \sum_{i=1}^s c_i t^{r_i-1/2} \right) dt \right|$$

mit  $c_i = b_i(r_i + 1/2)/(\bar{q} + 1/2)$ . Nach der Schwarzischen Ungleichung wird

$$J(x) \leq (\bar{q} + 1/2) \cdot \sqrt{x} \cdot \left\{ \int_0^1 \left( t^{\bar{q}-1/2} - \sum_{i=1}^s c_i t^{r_i-1/2} \right)^2 dt \right\}^{1/2}.$$

Durch die Auswahl geeigneter Koeffizienten  $c_i$  und  $b_i$  machen wir den letzten Ausdruck minimal und erhalten mittels Lemma 1:

$$\begin{aligned} J(x) &\leq (\bar{q} + 1/2) \cdot \sqrt{x} \cdot d_s(x^{\bar{q}-1/2}; r_i - 1/2) \\ &= \sqrt{x} \cdot \frac{\bar{q} + 1/2}{\sqrt{2\bar{q}}} \cdot \prod_{i=1}^s \frac{|\bar{q} - r_i|}{\bar{q} + r_i}, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun

$$E_s(x^{\bar{q}}; r_i) \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \left| x^{\bar{q}} - \sum_{i=1}^s b_i x^{r_i} \right| \leq \frac{\bar{q} + 1/2}{\sqrt{2\bar{q}}} \prod_{i=1}^s \frac{|\bar{q} - r_i|}{\bar{q} + r_i}. \quad (7)$$

Für beliebige Koeffizienten  $a_i$  ist

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left| x^q - \sum_{i=0}^s a_i x^{p_i} \right| = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| x^{\bar{q}} - \sum_{i=0}^s a_i x^{r_i} \right|$$

und daher

$$E_s(x^q; p_i) = E_s(x^{\bar{q}}; r_i). \quad (8)$$

Wir wählen nun  $M = 1/(2q)$  und erhalten aus (8) und (7)

$$E_s(x^q; p_i) \leq \frac{\bar{q} + 1/2}{\sqrt{2\bar{q}}} \prod_{i=1}^s \frac{|\bar{q} - r_i|}{\bar{q} + r_i} = \prod_{i=1}^s \frac{|q - p_i|}{q + p_i}.$$

Um günstige Abschätzungen für die Koeffizienten unserer Approximationspolynome (Vergleiche Satz 4) zu finden, ist folgender Satz vom Jackson-Typ über simultane Approximationen wichtig:

**SATZ 3.** *Es sei  $f$  in  $[-1, 1]$   $k$ -mal stetig differenzierbar,  $k \geq 0$ . Für jedes*

$n > 2k$  existiert dann ein algebraisches Polynom  $P_n$  vom Grade  $n$ , so daß für alle  $x \in [-1, 1]$  gilt:

$$|f^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| \leq C_{kr} n^{r-k} w(f^{(k)}; 1/n) \quad \text{für } r = 0, \dots, k; \quad (9)$$

$$|P_n^{(k+1)}(x)| \leq D_k n w(f^{(k)}; 1/n). \quad (10)$$

Dabei sind die Konstanten  $C_{kr}$  und  $D_k$  nur von  $k$ , nicht aber von  $f$  und  $n$  abhängig.

Satz 3 läßt sich aus analogen Aussagen im trigonometrischen Fall gewinnen ( $f$  und  $f^{(k)}$  stetig mit Periode  $2\pi$ ,  $P_n$  trigonometrisches Polynom der Periode  $2\pi$  vom Grade  $n$ ), wo (9) ein bekanntes Ergebnis von Freud-Czipszer [4] und Garkavi [5], (10) von M. Zamansky [19] ist. Leicht gewinnt man Satz 3 auch aus einem besseren Ergebnis von Runck [16]: (Vergleiche hierzu auch die Arbeiten von Teljakovskii [17] und Gopengauz [10]).

SATZ 3a (P. O. Runck). *Es sei  $f$  in  $[-1, 1]$   $k$ -mal stetig differenzierbar,  $k \geq 0$ . Für jedes  $n > 2k$  existiert ein algebraisches Polynom  $Q_n$  vom Grade  $n$ , so daß für alle  $x \in [-1, 1]$  gilt:*

$$|f^{(r)}(x) - Q_n^{(r)}(x)| \leq \bar{C}_{kr} \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^{k-r} w \left( f^{(k)}; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right); \quad r = 0, \dots, k;$$

$$|Q_n^{(k+1)}(x)| \leq \bar{D}_k (\Delta_n(x))^{-1} w(f^{(k)}; \Delta_n(x)),$$

wobei

$$\Delta_n(x) = \max\{1/n^2; \sqrt{1-x^2}/n\}.$$

Die Konstanten  $\bar{C}_{kr}$  und  $\bar{D}_k$  sind nur von  $k$ , nicht von  $f$  und  $n$  abhängig.

Die Aussage des Satzes 3 verwenden wir nun, um zu einer Funktion  $f$  eine Polynomfolge zu konstruieren, die zwar von  $f$  stärker abweicht, deren Koeffizienten dafür wesentlich besseren Abschätzungen genügen:

SATZ 4. *Es sei  $f$  in  $[0, 1]$   $k$ -mal stetig differenzierbar,  $k \geq 0$ . Zu einem  $n > 2k$  sei ein  $\lambda \geq 1$  vorgegeben. Dann existiert ein Polynom  $T_n(x) = \sum_{i=0}^n b_{in} x^i$ , so daß für alle  $x \in [0, 1]$  gilt:*

$$|f^{(r)}(x) - T_n^{(r)}(x)| \leq C_{kr} \left( \frac{\lambda}{n} \right)^{k-r} w \left( f^{(k)}; \frac{\lambda}{n} \right), \quad r = 0, \dots, k; \quad (11)$$

$$|b_{in}| \leq D_k \left( \frac{n}{\lambda} \right)^{n-k} w \left( f^{(k)}; \frac{\lambda}{n} \right) / q! \quad \text{für } q = k + 1, \dots, n. \quad (12)$$

Die Konstanten  $C_{kr}$  und  $D_k$  sind die des Satzes 3 und daher nur abhängig von  $k$ , aber unabhängig von  $f$ ,  $n$ , und  $\lambda$ .

*Beweis.* Wir betrachten die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ f(0) + f'(0)x + \cdots + f^{(k)}(0)x^k/k!, & -\lambda \leq x \leq 0 \\ f(1) + f'(1)(x-1) + \cdots + f^{(k)}(1)(x-1)^k/k!, & 1 \leq x \leq \lambda. \end{cases}$$

$g$  ist in  $[-\lambda, \lambda]$   $k$ -mal stetig differenzierbar mit

$$g^{(k)}(x) = \begin{cases} f^{(k)}(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ f^{(k)}(0), & -\lambda \leq x \leq 0; \\ f^{(k)}(1), & 1 \leq x \leq \lambda \end{cases} \quad w(g^{(k)}; t) = w(f^{(k)}; t)$$

für  $0 \leq t \leq 2\lambda$ , da  $w(f^{(k)}; t) = w(f^{(k)}; 1)$  für  $t \geq 1$ . Sei nun  $G(x) = g(\lambda x)$  für  $-1 \leq x \leq 1$ . Es ist  $G$  in  $[-1, 1]$   $k$ -mal stetig differenzierbar mit  $G^{(k)}(x) = \lambda^k \cdot g^{(k)}(\lambda x)$  und

$$w(G^{(k)}; t) = \lambda^k w(f^{(k)}; \lambda t), \quad 0 \leq t \leq 2. \quad (13)$$

Nach Satz 3 existiert zu  $G$  ein Polynom  $P_n$ , so daß für  $-1 \leq x \leq 1$

$$|G^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(x)| \leq C_{kr} n^{r-k} w(G^{(k)}; 1/n), \quad r = 0, \dots, k; \quad (14)$$

$$|P_n^{(k+1)}(x)| \leq D_k n w(G^{(k)}; 1/n). \quad (15)$$

Setze  $T_n(x) = P_n(x/\lambda)$ . Dann folgt aus (14) wegen  $f(x) = G(x/\lambda)$  für  $r = 0, \dots, k$  und alle  $x \in [0, 1]$ :

$$|f^{(r)}(x) - T_n^{(r)}(x)| \leq \lambda^{-r} \cdot C_{kr} n^{r-k} w(G^{(k)}; 1/n).$$

Durch Einsetzen von (13) folgt daraus die Ungleichung (11). Nach [18] Timan, 4.8.81., (49), angewendet auf  $P_n^{(k+1)}$  ist

$$|P_n^{(q)}(0)| \leq n^{q-k-1} \max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n^{(k+1)}(x)|, \quad q \geq k+1. \quad (16)$$

Aus (16) folgt nun bei Verwendung von (15) und (13) für  $q \geq k+1$ :

$$\begin{aligned} |b_{qn}| &= |T_n^{(q)}(0)|/q! = \lambda^{-q} |P_n^{(q)}(0)|/q! \\ &\leq \lambda^{-q} n^{q-k} D_k w(G^{(k)}; 1/n)/q! = D_k \left(\frac{n}{\lambda}\right)^{q-k} w\left(f^{(k)}; \frac{\lambda}{n}\right)/q!. \end{aligned}$$

Damit ist auch (12) bewiesen.

**2.** Von nun an machen wir für die reelle Exponentenfolge  $\{p_i\}$  die folgende Voraussetzung:

Es sei  $0 = p_0 < p_1 < \dots$ , und es mögen Konstante  $0 < A < \infty, 0 < B < \infty$  und  $0 < \delta \leq \bar{\delta} < \infty$  existieren, so daß für alle  $s = 1, 2, \dots$  gilt:

$$A(p_s)^\delta \leq \exp\left(\sum_{i=1}^s 1/p_i\right) \leq B(p_s)^\delta. \tag{17}$$

Dann sind auch die Voraussetzungen  $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = \infty$  und  $\sum_{i=1}^\infty 1/p_i = \infty$  des Müntzschens Satzen erfüllt.

Die Voraussetzung (17) ist etwas allgemeiner als die Voraussetzung (4), a-c, in [8] auf Seite 526. Denn ist letztere erfüllt mit den dort definierten Größen  $\Delta$  und  $\bar{\Delta}$ , so gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  zwei Konstanten  $0 < A(\epsilon) < \infty$  und  $0 < B(\epsilon) < \infty$  mit

$$A(\epsilon)(p_s)^{\Delta-\epsilon} \leq \exp\left(\sum_{i=1}^s 1/p_i\right) \leq B(\epsilon)(p_s)^{\bar{\Delta}+\epsilon}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Jedoch ist die Voraussetzung (17) noch nicht sehr allgemein. Daher ist ein weiterer Artikel des Autors in Vorbereitung, in dem (17) durch umfassendere Voraussetzungen für die Exponenten  $p_i$  ersetzt wird. Zum Beispiel wird dann auch der Spezialfall  $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p < \infty$  behandelt.

Mit Hilfe der Ergebnisse des 1 ist es nun nicht schwierig, auch für die Approximation durch Polynome mit Exponenten  $p_i$  Sätze vom Jackson-Typ anzugeben. Bei der Approximation der Funktion  $f(x) = x^q$  erhalten wir

**SATZ 5.** Die Exponentenfolge  $\{p_i\}$  erfülle (17). Sei  $q > 0$  eine reelle Zahl mit  $q < p_s$  und  $q \notin \{p_i\}$ . Dann erfüllt die nach (3) gebildete beste Approximation die Ungleichung

$$E_s(x^q; p_i) \leq \left(\frac{B}{A}\right)^{2q} \cdot q^{2q\delta} \cdot p_s^{-2q\delta}. \tag{18}$$

Daher ist  $E_s(x^q; p_i) = O(p_s^{-2q\delta})$  für  $s \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Für  $0 \leq x \leq 1$  ist  $(1-x)/(1+x) \leq e^{-2x}$ . Für  $0 < q < p_i$  folgt hieraus

$$\frac{p_i - q}{p_i + q} = \frac{1 - q/p_i}{1 + q/p_i} \leq e^{-2q/p_i}.$$

Nach Lemma 2 ist dann (mit  $r$  so, daß  $p_r < q < p_{r+1}$ ):

$$E_s(x^q; p_i) \leq \prod_{i=r+1}^s \frac{p_i - q}{p_i + q} \leq \prod_{i=r+1}^s e^{-2q/p_i}.$$

Mit Hilfe von (17) schätzen wir weiter ab:

$$\begin{aligned} E_s(x^q; p_i) &\leq \exp\left(-2q \sum_{i=r+1}^s 1/p_i\right) \leq [B \cdot (p_r)^\delta]^{2q} \cdot [A(p_s)^\delta]^{-2q} \\ &\leq \left(\frac{B}{A}\right)^{2q} \cdot q^{2q\delta} \cdot p_s^{-2q\delta}. \end{aligned}$$

Approximieren wir eine beliebige Funktion  $f \in C[0, 1]$ , so erhalten wir folgende Erweiterung des Satzes 1 von Jackson:

**SATZ 6.** Sei  $f$  in  $[0, 1]$   $k$ -mal stetig differenzierbar,  $k \geq 0$ . Die Exponentenfolge  $\{p_i\}$  erfülle (17). Dann gilt für die nach (3) gebildete beste Approximation  $E_s(f; p_i)$  für jedes  $s$  mit  $p_s \geq 2k + 1$  folgende Abschätzung:

Fall I:  $\delta \leq 1/2$ .

$$E_s(f; p_i) \leq K_k(p_s^{-2\delta})^k w(f^{(k)}; p_s^{-2\delta}) + L_k(p_s^{-2\delta})^{q^*}. \quad (19)$$

Fall II:  $\delta > 1/2$ .

$$E_s(f; p_i) \leq K_k(p_s^{-\delta/\delta})^k w(f^{(k)}; p_s^{-\delta/\delta}) + L_k(p_s^{-2\delta})^{q^*}. \quad (20)$$

Für  $k = 0$  entfällt der zweite Summand der rechten Seite von (19) und (20), d.h.  $L_0 = 0$ . Die Größe  $q^*$  ist definiert durch

$$q^* = \min Q = \min\{q = 1, \dots, k; q \notin \{p_i\}, f^{(q)}(0) \neq 0\}.$$

Falls  $Q$  leer ist, so ist  $L_k = 0$ .

Die Konstanten  $K_k$  sind nur abhängig von  $k$  und der Exponentenfolge  $\{p_i\}$ , aber unabhängig von  $f$  und  $s$ . Die Konstanten  $L_k$  haben die Form

$$L_k = \sum_{q=1, q \notin \{p_i\}}^k c_q |f^{(q)}(0)|, \quad c_q = (B/A)^{2q} \cdot q^{2q\delta}/q!,$$

wobei  $c_q$  ebenfalls nur von  $q$  und der Folge  $\{p_i\}$  abhängt.

*Beweis.* Sei  $s$  fest vorgegeben mit  $p_s \geq 2k + 1$ . Dazu bestimmen wir die natürliche Zahl  $n = n_s$  durch  $n \leq p_s < n + 1$ . Für ein  $\lambda > 1$ , das später erst festgelegt wird, existiert nach (11) und (12) des Satzes 4 zu  $f$  ein Polynom

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^n b_{in} x^i,$$

so daß für  $0 \leq x \leq 1$

$$|f(x) - T_n(x)| \leq C_{k0} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k w\left(f^{(k)}; \frac{\lambda}{n}\right), \quad (21)$$

für  $1 \leq q \leq k$

$$|b_{qn}| \leq |f^{(q)}(0)|/q! + C_{kq} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k-q} w\left(f^{(k)}; \frac{\lambda}{n}\right)/q! \quad (22)$$

und für  $k + 1 \leq q \leq n$

$$|b_{qn}| \leq D_k \left(\frac{n}{\lambda}\right)^{q-k} w\left(f^{(k)}; \frac{\lambda}{n}\right)/q! \quad (23)$$

erfüllt ist.

Im obigen Polynom  $T_n$  ersetzen wir nun jedes  $x^q$  mit  $1 \leq q \leq n$ ,  $q \notin \{p_i\}$ , durch das Polynom bester Approximation

$$Q_{sq}(x) = \sum_{i=0}^s a_{iq} x^{p_i}$$

für die Funktion  $x^q$  im Intervall  $[0, 1]$ , d.h.:

$$E_{sq} = E_s(x^q; p_i) = \max_{0 \leq x \leq 1} |x^q - Q_{sq}(x)|.$$

Dadurch erhalten wir das Polynom

$$\tilde{T}_s(x) = \sum_{q=0, q \notin \{p_i\}}^n b_{qn} x^q + \sum_{q=1, q \in \{p_i\}}^n b_{qn} Q_{sq}(x), \quad (24)$$

das genau die gewünschten Exponenten  $0 = p_0, p_1, \dots, p_s$  besitzt. Für alle  $x \in [0, 1]$  gilt dann

$$|f(x) - \tilde{T}_s(x)| \leq |f(x) - T_n(x)| + \sum_{q=1, q \in \{p_i\}}^n |b_{qn}| E_{sq}. \quad (25)$$

Es sei  $w = w(f^{(k)}; \lambda/n)$  gesetzt.

*Fall I:*  $\delta \leq 1/2$ .

Wir wählen nun  $\lambda = \gamma n^{1-2\delta}$  mit  $\gamma = \max\{2e, 2e(B/A)^2\}$ . Nach (18) und (22) und wegen  $\lambda/n < 2\gamma p_s^{-2\delta}$  ist für  $1 \leq q \leq k$

$$|b_{qn}| E_{sq} \leq c_q |f^{(q)}(0)| p_s^{-2q\delta} + c_q C_{kq} (2\gamma)^{k-q} w p_s^{-2k\delta}. \quad (26)$$

Aus (18) und (23) folgt unter Verwendung von  $n/\lambda \leq p_s^{2\delta}/\gamma$  und  $q^{2q\delta}/q! \leq q^q/q! < e^q$  für all  $k + 1 \leq q \leq n$ :

$$|b_{qn}| E_{sq} \leq D_k(\gamma)^k w p_s^{-2k\delta} 2^{-q}. \quad (27)$$



Wir schreiben

$$\sum_1 = \sum_{q=1, q \notin \{p_i\}}^k, \quad \sum_2 = \sum_{q=k+1, q \notin \{p_i\}}^n.$$

Wir erhalten insgesamt aus (25) unter Verwendung von (21), (26) und (27) im Falle  $\delta \leq 1/2$ :

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - \tilde{T}_s(x)| &\leq C_{k0}(2\gamma)^k p_s^{-2k\delta} w + \sum_1 c_q |f^{(q)}(0)| p_s^{-2q\delta} \\ &\quad + \sum_1 c_q C_{kq}(2\gamma)^{k-q} w p_s^{-2k\delta} + \sum_2 D_k(\gamma)^k w p_s^{-2k\delta} 2^{-q} \\ &\leq p_s^{-2q^* \delta} \sum_1 c_q |f^{(q)}(0)| + K'_k p_s^{-2k\delta} w. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Ungleichung (19) wegen

$$w = w(f^{(k)}; \lambda/n) \leq (2\gamma + 1) w(f^{(k)}; p_s^{-2\delta}).$$

*Fall II:*  $\delta > 1/2$ .

Wir wählen nun  $\lambda = \gamma n^{1-\delta/\delta}$  mit  $\gamma = \max\{2e, 2e(B/A)^2\}$ . Es ist

$$\lambda/n < 2\gamma p_s^{-\delta/\delta}; \quad n/\lambda \leq (p_s^{\delta/\delta})/\gamma. \quad (28)$$

Nach (18) und (22) unter Verwendung von (28) ist für  $1 \leq q \leq k$ :

$$|b_{qn}| E_{sq} \leq c_q |f^{(q)}(0)| p_s^{-2q\delta} + c_q C_{kq}(2\gamma)^{k-q} w (p_s^{\delta/\delta})^k. \quad (29)$$

Unter Verwendung von  $q! > q^q e^{-q}$  folgt für  $k+1 \leq q \leq p_s^{\delta/\delta}$  aus (18), (23) und (28):

$$|b_{qn}| E_{sq} \leq D_k(\gamma)^k w (p_s^{\delta/\delta})^k 2^{-q}. \quad (30)$$

Wegen  $E_{sq} \leq 1$  folgt aus (23) und (28) für  $p_s^{\delta/\delta} < q \leq n$ :

$$|b_{qn}| E_{sq} \leq |b_{qn}| \leq D_k(\gamma)^k w (p_s^{\delta/\delta})^k 2^{-q}. \quad (31)$$

Wir erhalten insgesamt aus (25) unter Verwendung von (21), (29), (30) und (31) im Falle  $\delta > 1/2$ :

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - \tilde{T}_s(x)| &\leq C_{k0}(2\gamma)^k (p_s^{-\delta/\delta})^k w + \sum_1 c_q |f^{(q)}(0)| p_s^{-2q\delta} \\ &\quad + \sum_1 c_q C_{kq}(2\gamma)^{k-q} w (p_s^{-\delta/\delta})^k + \sum_2 D_k(\gamma)^k w (p_s^{-\delta/\delta})^k 2^{-q} \\ &\leq p_s^{-2q^* \delta} \sum_1 c_q |f^{(q)}(0)| + K'_k (p_s^{-\delta/\delta})^k w. \end{aligned}$$

Wegen  $w = w(f^{(k)}; \lambda/n) \leq (2\gamma + 1) w(f^{(k)}; p_s^{-\delta/\delta})$  folgt die Ungleichung (20). Somit ist der Beweis von Satz 6 beendet.

Im nun folgenden Beispiel 1 zu Satz 6 zeigen wir, daß der Satz 1 von Jackson in Satz 6 enthalten ist. Auch im Beispiel 2 und 3 liefern die Ungleichungen (19) und (20) des Satzes 6 bis auf die Konstanten  $K_k$  und  $L_k$  optimale Ergebnisse. Im Beispiel 3 erweist sich zusätzlich die Unterscheidung der Fälle  $\delta \leq 1/2$  und  $\delta > 1/2$  als notwendig.

Die Funktion  $f$  sei wie bisher in  $[0, 1]$   $k$ -mal stetig differenzierbar,  $k \geq 0$ .

BEISPIEL 1. Wir betrachten den klassischen Fall  $p_i = i, i = 0, 1, \dots$ , der Approximation durch gewöhnliche algebraische Polynome. Es ist

$$n \leq \exp \left( \sum_{i=1}^n 1/i \right) \leq en \tag{17'}$$

und deshalb  $\delta = \delta = 1$ . Satz 6, (20), liefert dann wegen  $L_k = 0$  die Abschätzung

$$E_n(f; i) = E_n(f) \leq K_k n^{-k} w(f^{(k)}; 1/n),$$

also dasselbe Ergebnis wie Satz 1.

BEISPIEL 2. (Das Problem endlich vieler Lücken). Es sei  $M = \{q_1, \dots, q_m\}$  eine endliche Teilmenge der positiven ganzen Zahlen. Die Exponenten  $p_i$  mögen alle nichtnegativen ganzen Zahlen mit Ausnahme der Elemente aus  $M$  durchlaufen.  $E_s(f; \bar{M})$  sei die nach (3) gebildete beste Approximation. Dann ist  $\delta = \delta = 1$ . Satz 6 liefert für jedes  $s$  mit  $s > 2k, s > \max M, p_{s-m} = s$ :

$$E_{s-m}(f; \bar{M}) \leq K_k s^{-k} w(f^{(k)}; 1/s) + L_k s^{-2q^*}. \tag{32}$$

Dabei ist  $L_k = 0$ , falls  $k < \min M$  oder falls  $f^{(q_i)}(0) = 0$  für alle  $q_i \in M, q_i \leq k$ . In allen anderen Fällen ist

$$q^* = \min\{q_i \in M, q_i \leq k, f^{(q_i)}(0) \neq 0\}.$$

Der Summand 1 der rechten Seite von (32) ist identisch mit dem der Ungleichung (2) und wegen  $E_s(f) \leq E_{s-m}(f; \bar{M})$  nicht zu verbessern. Der Summand 2  $L_k s^{-2q^*}$  ist notwendig, da für die beliebig oft differenzierbare Funktion  $x^{q^*}$  folgendes gilt: Zu jedem  $\epsilon > 0$  existiert eine Konstante  $0 < C(\epsilon) < \infty$  mit

$$C(\epsilon) s^{-2q^* - \epsilon} \leq E_{s-m}(x^{q^*}; \bar{M}) \leq A s^{-2q^*}.$$

Dabei ist natürlich  $q^* \in M$  und  $0 < A < \infty$ . Der Beweis hierzu wird in [7] geführt.

BEISPIEL 3. Für ein reelles  $r > 0$  betrachten wir die Exponentenfolge  $p_i = i \cdot r, i = 0, 1, \dots$ . Wegen

$$r^{-1/r}(rs)^{1/r} \leq \exp\left(\sum_{i=1}^s 1/(ri)\right) \leq (e/r)^{1/r}(rs)^{1/r}$$

ist  $\delta = \bar{\delta} = 1/r$ . Nach Satz 6 erhalten wir:

Für  $k = 0$ :

$$\begin{aligned} r \geq 2: E_s(f; ir) &\leq K_0 w(f; (rs)^{-2/r}); \\ 0 < r < 2: E_s(f; ir) &\leq K_0 w(f; (rs)^{-1}). \end{aligned}$$

Für  $k \geq 1, f'(0) \neq 0$  und  $1/r \notin N$  ist  $q^* = 1$ :

$$\begin{aligned} r \geq 2: E_s(f; ir) &\leq K_k(rs)^{-2k/r} w(f^{(k)}; (rs)^{-2/r}) + L_k(rs)^{-2/r}; \\ 0 < r < 2: E_s(f; ir) &\leq K_k(rs)^{-k} w(f^{(k)}; (rs)^{-1}) + L_k(rs)^{-2/r}. \end{aligned}$$

All diese Abschätzungen können wir aber auch direkt beweisen. Für jedes  $r > 0$  ist nämlich

$$E_s(f; ir) = E_s(f(x^{1/r}); i) = E_s^*(f(|\cos t/2|^{2/r})),$$

wobei  $E_s^*$  die beste Approximation durch trigonometrische Polynome vom Grade  $s$  ist. Die Sätze von Jackson und Bernstein im trigonometrischen Fall zeigen dann, daß die vier obigen Abschätzungen für  $E_s(f; ir)$  im allgemeinen optimal sind. Ebenfalls erweist sich die Unterscheidung der Fälle  $r \geq 2$  ( $\bar{\delta} \leq 1/2$ ) und  $0 < r < 2$  ( $\bar{\delta} > 1/2$ ) als notwendig. Ein Beispiel mit  $0 < \delta < \bar{\delta} < \infty$  wird in [7] gezeigt.

## II. APPROXIMATION IM INTERVALL $[a, b]$

Alle bisherigen Ergebnisse, insbesondere auch Satz 6, gelten nur für die Approximation im Intervall  $[0, 1]$ . Wir stellen daher die naheliegende Frage, wie sich unsere Aussagen auf beliebige endliche Intervalle  $[a, b]$  übertragen lassen. Es wird sich zeigen, daß die Approximationsgüte im wesentlichen von der Lage des Punktes  $x = 0$  in bezug auf  $[a, b]$  abhängt. Wir beschränken uns hier auf den Fall  $0 < a < b$ . Für die anderen Fälle vergleiche man in [7] oder [9].

$E_s(f; p_i; a, b)$  sei die gemäß (3) definierte beste Approximation in  $[a, b]$ . Das Polynom bester Approximation mit Exponenten  $0, p_1, \dots, p_s$  ist für jede Funktion  $f \in C[a, b]$ ,  $0 < a < b$ , eindeutig bestimmt, da die Funktionen  $1, x^{p_1}, \dots, x^{p_s}$  in  $[a, b]$  ein Haarsches System bilden. Dem Satz 6 entsprechend formulieren wir:

SATZ 7. Die Exponentenfolge  $\{p_i\}$  erfülle (17). In  $[a, b]$ ,  $0 < a < b$ , sei  $f$   $k$ -mal stetig differenzierbar,  $k \geq 0$ . Außerdem sei die  $k$ -te Ableitung  $f^{(k)}$  keine konstante Funktion. Dann gilt für genügend großes  $s$

$$E_s(f; p_i; a, b) \leq \bar{K}_k (p_s^{-\delta/\delta})^k w(f^{(k)}; p_s^{-\delta/\delta}). \quad (33)$$

Dabei ist  $\bar{K}_0$  nur abhängig von  $a, b, \{p_i\}$ . Für  $k \geq 1$  sei

$$M_i = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(i)}(x)|, \quad i = 1, \dots, k.$$

Dann ist  $\bar{K}_k$  nur abhängig von  $a, b, \{p_i\}, k, M_1, \dots, M_k$ .

Beweis. Sei  $r = 2\delta/(k + 1)$  und  $\rho = (a/b)^{1/r}$ . Wir zeigen das folgende

LEMMA. Die Funktion  $g(x) = f(bx^r)$  ist in  $[\rho, 1]$   $k$ -mal stetig differenzierbar. Außerdem existiert eine Konstante  $0 < C < \infty$ , abhängig von  $a, b, r, k, M_1, \dots, M_k$ , mit folgender Eigenschaft

$$w(g^{(k)}; h) \leq Cw(f^{(k)}; h), \quad h \geq 0. \quad (34)$$

Beweis. Für  $k = 0$  ist (34) trivial. Für  $k \geq 1$  erhalten wir durch Induktion für  $p = 1, \dots, k$

$$g^{(p)}(x) = \sum_{j=1}^p T_{pj}(x) f^{(j)}(bx^r), \quad (35)$$

wobei  $T_{pj} = a_{pj}x^{rj-p}$  ist, und somit nicht von  $f$  abhängt. Wir wählen nun  $M'$  so, daß für alle  $j = 1, \dots, k$  gilt:

$$\max_{\rho \leq x \leq 1} |T_{kj}(x)| \leq M', \quad \max_{\rho \leq x \leq 1} |T'_{kj}(x)| \leq M'.$$

Für  $x, y \in [\rho, 1]$ ,  $|x - y| \leq h$  ist  $|bx^r - by^r| \leq Kh$ ,

$$|f^{(j)}(bx^r) - f^{(j)}(by^r)| \leq M_{j+1}Kh, \quad j = 1, \dots, k - 1,$$

$$|f^{(k)}(bx^r) - f^{(k)}(by^r)| \leq (K + 1)w(f^{(k)}; h).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} |g^{(k)}(x) - g^{(k)}(y)| &\leq \left| \sum_{j=1}^k f^{(j)}(bx^r)(T_{kj}(x) - T_{kj}(y)) \right| \\ &+ \left| \sum_{j=1}^k T_{kj}(y)(f^{(j)}(bx^r) - f^{(j)}(by^r)) \right| \leq \sum_{j=1}^k M_j M' h \\ &+ \sum_{j=1}^{k-1} M' M_{j+1} Kh + M'(K + 1)w(f^{(k)}; h). \end{aligned}$$

Daher ist

$$w(g^{(k)}; h) \leq Nh + N'w(f^{(k)}; h). \quad (36)$$

Aber für  $0 < h \leq 1$  ist

$$w(f^{(k)}; 1) \leq (1 + h^{-1}) w(f^{(k)}; h) \leq 2h^{-1}w(f^{(k)}; h),$$

und damit

$$h \leq 2w(f^{(k)}; h)/w(f^{(k)}; 1). \quad (37)$$

Aus (36) und (37) folgt unmittelbar (34); womit das Lemma bewiesen ist.

Die Funktion

$$G(x) = \begin{cases} g(x), & \rho \leq x \leq 1 \\ g(\rho) + g'(\rho)(x - \rho) + \dots + g^{(k)}(\rho)(x - \rho)^k/k!, & 0 \leq x \leq \rho \end{cases}$$

ist in  $[0, 1]$   $k$ -mal stetig differenzierbar mit

$$w(G^{(k)}; h) = w(g^{(k)}; h). \quad (38)$$

Für beliebige  $c_i$  ist

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{i=0}^s c_i x^{p_i} \right| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \left| G(x) - \sum_{i=0}^s c_i (bx^r)^{p_i} \right|$$

und damit

$$E_s(f; p_i; a, b) \leq E_s(G; rp_i). \quad (39)$$

Erfüllt  $\{p_i\}$  die Voraussetzung (17), so gilt für  $\{rp_i\}$

$$(A/r^\delta)^{1/r}(rp_s)^{\delta/r} \leq \exp\left(\sum_{i=1}^s 1/(rp_i)\right) \leq (B/r^\delta)^{1/r}(rp_s)^{\delta/r} \quad (17)'$$

und damit  $\delta_r = \delta/r$  und  $\tilde{\delta}_r = \tilde{\delta}/r = (k+1)/2 \geq 1/2$ . Wir wenden nun Satz 6 auf  $G$  und  $\{rp_i\}$  an:

$$E_s(G; rp_i) \leq K_k [(rp_s)^{-\delta/\tilde{\delta}}]^k w(G^{(k)}; (rp_s)^{-\delta/\tilde{\delta}}) + L_k (rp_s)^{-2q^*/r}. \quad (20)'$$

Ist  $L_k = 0$ , so folgt (33) aus (39), (20)', (38) und (34). Sei  $L_k \neq 0$ ,  $q^* \geq 1$ : Aus (20)', (38), (34) und  $2q^*\delta/r \geq 2\tilde{\delta}/r = (k+1)\delta/\tilde{\delta}$  folgt

$$E_s(G; rp_i) \leq K'_k (p_s^{-\delta/\tilde{\delta}})^k [w(f^{(k)}; p_s^{-\delta/\tilde{\delta}}) + p_s^{-\delta/\tilde{\delta}}]. \quad (40)$$

Mit Hilfe von (39), (40) und (37) gewinnen wir endlich (33), womit Satz 7 vollständig bewiesen ist.

Im ersten Augenblick ist es überraschend, daß die Größenordnung von  $E_s(f; p_i; a, b)$  in (33) nur vom Verhältnis  $\delta/\tilde{\delta}$ , nicht von  $\delta$  und  $\tilde{\delta}$  selbst

abhängt. Der Grund hierfür ist, daß die Struktureigenschaften von  $f$  in  $[a, b]$  auf  $g$  in  $[\rho, 1]$ ,  $g(x) = f(bx^r)$ , für jedes  $r > 0$  übertragen werden und daß

$$E_s(f; p_i; a, b) = E_s(g; rp_i; \rho, 1)$$

gilt, während für die Folge  $\{rp_i\}$  dann  $\delta_r = \delta/r$  und  $\bar{\delta}_r = \bar{\delta}/r$  ist.

BEISPIEL 4. In  $[a, b]$ ,  $0 < a < b$ , sei die  $k$ -te Ableitung  $f^{(k)} \in \text{Lip } \alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Dann ist für jedes reelle  $r > 0$

$$E_s(f; ir; a, b) = O(s^{-k-\alpha}), \quad s \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Diese Abschätzung ist im allgemeinen für kein  $r > 0$  zu verbessern.

Wir folgern (41) entweder aus Satz 7 oder direkt aus Satz 1 von Jackson unter Verwendung von

$$E_s(f; ir; a, b) = E_s(f(x^{1/r}); i; a^r, b^r).$$

#### LITERATURVERZICHNIS

1. N. I. ACHESER, "Vorlesungen über Approximationstheorie," Akademie Verlag, Berlin, 1953.
2. E. W. CHENEY, "Introduction to Approximation Theory," McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
3. J. A. CLARKSON AND P. ERDÖS, Approximation by polynomials, *Duke Math. J.* **10** (1943), 5–11.
4. J. CZIPSZER AND G. FREUD, Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un polynôme trigonométrique et par ses dérivées successives, *Acta Math.* **99** (1958), 33–51.
5. A. L. GARKAVI, Simultane Approximation einer periodischen Funktion und ihrer Ableitungen durch trigonometrische Polynome, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* **24** (1960), 103–128.
6. A. O. GELFOND, Über die verallgemeinerten Polynome von S. N. Bernstein, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **14** (1950), 413–420.
7. M. v. GOLITSCHKEK, Inauguraldissertation der Universität in Würzburg, 1969. Sätze von Jackson für Polynome  $\sum_{i=0}^s a_i x^{p_i}$ .
8. M. v. GOLITSCHKEK, Generalization of the Jackson approximation theorems in the sense of Ch. Müntz, *Bull. Amer. Math. Soc.* **15** (1969), 524–528.
9. M. v. GOLITSCHKEK, Jackson-Sätze für Polynome  $\sum_{i=0}^s a_i x^{p_i}$ , ISNM, Vol. 10, "Abstract Spaces and Approximation," Proceedings of the Conference at Oberwolfach, 1968.
10. I. E. GOPENGAUZ, Über einen Satz von A. F. Timan über die Approximation von Funktionen durch Polynome auf einem endlichen Intervall, *Mat. Zametki* **1** (1967), 163–172.
11. I. I. HIRSCHMAN AND D. V. WIDDER, "Generalized Bernstein polynomials," *Duke Math. J.* **16** (1949), 433–438.
12. I. I. HIRSCHMAN AND D. V. WIDDER, "The Convolution Transform," Princeton University Press, Princeton, N. J., 1955.

13. G. G. LORENTZ, "Approximation of Functions," Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York, 1966.
14. G. MEINARDUS, "Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1964.
15. D. J. NEWMAN, A Müntz-Jackson theorem, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 940-944.
16. P. O. RUNCK, Bemerkungen zu den Approximationssätzen von Jackson und Jackson-Timan, ISNM, Vol. 10, "Abstract Spaces and Approximation," Proceedings of the Conference at Oberwolfach, 1968.
17. C. A. TELJAKOVSKII, Zwei Sätze über die Approximation von Funktionen durch algebraische Polynome, *Mat. Sb.* **70** (1966), 252-265.
18. A. F. TIMAN, "Theory of Approximation of Functions of a Real Variable," Pergamon Press, Oxford, 1963 and Hindustan Publ. Corp. (India), 1966.
19. M. ZAMANSKY, Sur l'approximation des fonctions continues, *C. R. Acad. Sci. Paris* **226** (1948), 1066-1068.